



Conceptos previos

Una progresión es geométrica, si cada termino después del primero se obtiene multiplicando el anterior por un valor constantes Este valor constante se llama razón geométrica (q)

En general: $\div a_1; a_2 : a_3 \dots a_n$

Si la razón es q, y el primer termino es a, la progresión se escribe.

$\div a : aq : aq^2 : aq^3 \dots aq^{n-1}$

POR LO TANTO EL ENÉSIMO TÉRMINO DE UNA P.G SE DETERMINA A PARTIR DE:

$$a_n = aq^{n-1}$$

PROPIEDADES DE LAS PROGRESIONES GEOMÉTRICAS.

1.- el producto de dos términos equidistantes de los extremos, equivale al producto de los extremos.

En efecto

$$\begin{array}{ccc} \div a \dots \dots \dots b & & c \dots \dots \dots d \\ \underbrace{\hspace{10em}} & & \underbrace{\hspace{10em}} \\ \text{n términos} & & \text{n términos} \\ : & & \\ b = aq^{n-1} & & d = cq^{n-1} \end{array}$$

Dividiendo estas igualdades, se obtiene:

$$\frac{b}{d} = \frac{aq^{n-1}}{cq^{n-1}} \Rightarrow \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \Rightarrow ad = bc$$

De esto se deduce otra importante propiedad: Un término cualquiera en una P.G es media proporcional entre el término inmediatamente anterior y el inmediatamente superior. Esto es:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \times a_{n+1}}$$

SUMA DE LOS ENÉSIMOS TÉRMINOS DE UNA P.G

Consideremos la P.G $\div a_1; a_2; \dots a_n$

Cuya suma corresponde a:

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, es decir si el primer término es a y la razón es q , se puede escribir que:

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots + aq^{n-3} + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

Si esta igualdad se amplifica por la razón q , se obtiene:

$$Sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \dots + aq^{n-3} + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n$$

De donde:

$$\begin{array}{l} S = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots + aq^{n-3} + aq^{n-2} + aq^{n-1} \\ Sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \dots + aq^{n-3} + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n \end{array}$$

$$S - Sq = a - aq^n$$

$$S(1 - q) = a - aq^n$$

$$S = \frac{a - aq^n}{(1 - q)}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

O bien: esta expresión, permite calcular la suma de los términos de una progresión geométrica finita creciente o decreciente.

Un caso especial es la progresión geométrica infinita decreciente, cuya suma de los enésimos términos se puede aproximar a un valor.

Supongamos la suma de los enésimos términos de la P.G infinita decreciente $S = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots + aq^{n-3} + aq^{n-2} + aq^{n-1}$ En ella $q < 1$, por lo tanto mientras mayor sea la potencia q^n , menor será su valor, y en el límite:

$$n \xrightarrow{\text{Lim}} 0 \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}, \text{ ya que } q^n \rightarrow 0 \text{ es decir:}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a}{1 - q}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN:

1.- formar la P.G, dados.

1.1.- $a=4$, $q=3$, $n=5$

1.2.- $a=9$, $q=2$, $n=6$

1.3.- $a=3$, $q=5$, $n=4$

1.4.- $a=100$, $q=1/2$, $n=5$

2.- calcule la razón en las P.G que se indican:

2.1.- 7,21,63,189.....

2.2.- 512, 128,32,.....

2.3.- a^3b, a^4b^2, a^6b^4

2.4.- $a\sqrt{6}, 3a^2\sqrt{2}, 3a^3\sqrt{6}$

2.5.- $\frac{8}{9}x^2y, \frac{2}{3}x^3, \frac{x^4}{2y}$

3.- formar una P.G de seis términos dados:

3.1.- $a=2$, $q=5$

3.2.- $a=7$, $q=4$

3.3.- $a=2916$, $q=1/3$

3.4.- $a=256$, $q=3/4$

4.- el producto del cuarto término de una P.G por el sexto es 5184 .calcular el quinto término.

5.- el tercer termino de una P.G es 15 y el quinto es 735 .¿Cual es el cuarto termino?

6.- expresar el valor general del 4º, del 7º , del 12º , del 16º y del 20º termino de una P.G

7.- calcular el 8º y el 12º termino de la P.G : 4 , 8 , 16.....

8.- calcular el 6º y el 10º termino de la P.G : 3 , 9 , 27 ,

9.- calcule el 7º y el 15º termino de la P.G : 128 , 64 , 32

10.- calcule el 8º y el 13º termino de la progresión 3,-6 , 12

11.- dados :

11.1.- $a=8$, $n=7$, calcule u

11.2.- $u=1458$, $q=3$, $n=5$, calcule q

11.3.- $a=5$, $q=4$, $u=20480$, calcule n

12.- Intercalar entre 7 y 567 tres términos, de modo que resulte una progresión geométrica.

13.- Intercalar entre 10 y 77760 tres términos, de modo que resulte una progresión geométrica.

14.- Si $a=5$, $q=3$, $u=1215$, calcule n

15.- si $a=9$, $u=36864$, $n=7$, calcule el cuarto termino

16.- el producto del 1° término por el 8° es 28700 y el 3° término es 90 .Calcular el 6° término.

17.- el 8° término es 384 y el 1° es 3 y el 6° es 96 .Formar la P.G

18.- el 1° término es 7 y el 3° es 112 .Formar la P.G

19.- el 1° término es 6 y el 4° 162. Calcular el 7° término.

20.- calcule la suma de los términos según se indica.

20.1.- a=2 q=3 n=6

20.2.- a=7 q=4 n=5

20.3.- a=-8 q= 5 n=4

20.4.- a=1215 q= 1/3 n=6

20.5.- a=4 q=6 u=31104

20.6.- a=3 q=-5 u=9375

20.7.- a=243 q=3/8 n=6

20.8.- a=4096 u=81 q=3/8

21.-

| | a | q | u | n | S |
|----|------|----------------|-------|---|-------|
| 1 | 8 | 5 | | | 31248 |
| 2 | | 2 | | 5 | 93 |
| 3 | 128 | 1/2 | | 7 | |
| 4 | | 3 | 13122 | | 19680 |
| 5 | | $2\frac{1}{2}$ | | | |
| 6 | -2 | | -2560 | 8 | |
| 7 | 7 | | 1792 | 5 | |
| 8 | 8 | | 1944 | | 2912 |
| 9 | 161 | 3 | | 4 | |
| 10 | | $1\frac{1}{2}$ | | 6 | 665 |
| 11 | | 3 | 15309 | 8 | |
| 12 | 4347 | | 161 | 4 | |

22.- formar una P. G de 5 términos de modo que la razón sea igual a 1/3 del primer término y que la suma de los dos primeros términos sea 18.

23.- si durante 20 años, un hombre, por su mal ejemplo o intencionalmente, induce a un solo hombre a abandonar la senda de la virtud, y cada uno de estos infelices seduce por su parte a un individuo por año. ¿Cual es el número de extraviado al cabo de 20 años?

24.- un jugador apuesta en el primer juego \$5, y como perdiera duplico la apuesta en el segundo juego con el mismo mal resultado .Continuo duplicando la apuesta hasta que en el octavo juego aposte todo el dinero que le quedaba. ¿Cuanto aposte en el ultimo juego y cuanto perdió?

25.- Buscar cuatro números positivos en P.G, de modo que el cuarto numero menos el tercero sea igual a 144, y que el segundo menos el primero sea igual a 16

26.- En una P.G de 4 términos, la suma del 1° con el 3° es 40, y la del 2° con el 4° es 20 .Hallar los números.

27.- La suma de tres números en P.G es 186 y la diferencia de los términos extremos es 144, Hallar los números.

28.- Hallar tres números positivos en P.G de modo que su suma sea 21 y que el mayor tenga tres unidades más que la suma de los otros dos.

29.- Calcular los ángulos de un cuadrilátero, sabiendo que forman una P.G, y que el mayor es igual a 9 veces el segundo.

30.- formar una P.G de tres términos cuyo producto sea 1728 y la suma 52.

31.- el volumen de un paralelepípedo rectangular es 3375 cc .Calcular las aristas sabiendo que están en P.G y que su suma es 65cm.

32.- En una P.G de 7 términos, la suma de los tres primeros términos es 13 y la suma de los tres últimos es 1053 .Formar la progresión.

33.- Cuatro personas se reparten cierta suma de dinero, de modo que cada persona recibe 4 veces lo que recibe la anterior, si la tercera persona recibió \$320 .¿Cual fue la suma repartida?

34.- Un terreno rectangular, de 750 m de ancho, tiene un perímetro de 3900 m, y produce una utilidad de \$625 por hectárea el primer año de cultivo, y en cada año siguiente rinde los $\frac{3}{4}$ de la utilidad del año anterior. ¿Cuanto ha producido este terreno en los primeros 5 años de cultivo?

35.- si en una P.G de tres términos, se resta 8 del segundo termino, resulta una P.A, y si en esta se resta 64 del tercer termino, resulta nuevamente una P.G .Formar la progresión.

36.- Una P.G y otra P.A, de tres términos cada una, tienen el mismo primer termino 4, y también el segundo termino es el mismo, pero desconocido no de la P...El tercer termino de la P.G es $\frac{25}{16}$ del tercer termino de la P.A .Establecer las progresiones.

37.- La suma de los infinitos términos de una serie geométrica es 9 y la suma de los dos primeros términos es 8 .Formar la serie.

38.- Si en un cuadrado de lado a, se unen los puntos medios de los lados contiguos, se forma otro cuadrado, y así indefinidamente .Calcular la suma de los lados y la suma de las áreas de los infinitos cuadrados que se forman.

39.- En un cuadrado de lado a, se ha inscrito otro cuadrado, cuyos vértices dividen los lados del primer cuadrado en la razón 1:2 .En el segundo cuadrado, se inscribe un tercer cuadrado que divide los lados del anterior en la misma razón, y así indefinidamente .Sumar las áreas y los lados de los infinitos cuadrados que se forman.

40.- Dado un triángulo equilátero, se construye otro triángulo igual que tenga como lado la altura del triángulo dado; en seguida se construye un tercer triángulo equilátero con la altura del segundo triángulo como lado,; después un cuarto triángulo equilátero con la altura del tercero como lado, y así indefinidamente. ¿Cuál es la suma de las áreas de todos los triángulos, incluso el dado?

41.- En un círculo de radio R , se inscribe un cuadrado; en este cuadrado se inscribe un círculo; en este círculo, se inscribe otro cuadrado y así indefinidamente. ¿Cuál es la suma de las áreas de los cuadrados y la suma de los círculos?